# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
### Filiera teoretică, profil umanist

### Clasa a IX-a

**1.** Într-un acvariu sunt 200 de peşti. 1% dintre ei sunt albaştri, toţi ceilalţi fiind galbeni. Câţi peşti galbeni trebuie luaţi din acvariu, astfel încât peştii albaştri să reprezinte 2% din toţi peştii rămaşi in acvariu?

**2.** O sferă care alunecă pe un plan înclinat parcurge în prima secundă 0,4 m şi în fiecare din secundele următoare cu 0,5 m mai mult decât în secunda precedentă. Ce distanţă a parcurs sfera după 25 de secunde?

**3.** Un topograf observă că dintr-un punct A o clădire se vede sub unghiul de $15^\circ$ . Apropiindu-se cu 20 m din punctul B, unghiul de observare este de $30^\circ$, iar după încă $\left(10\sqrt{3}-10\right)$ m din punctul C unghiul devine $45^\circ$. Determinaţi:

a) Înălţimea clădirii

b) Distanţa de la punctul A la punctul cel mai înalt al clădirii.

**4.** În sistemul de coordonate (xOy) se consideră punctele A(2x - 1, 0), B(x, 0), C(0, x), $x\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2+BC^2+\frac{m}{4}\right],\ m\in\mathbb{R}$

Să se determine funcţia f, ştiind că graficul funcţiei este tangent la axa Ox.

***Notă:*** *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

**CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**
***"ADOLF HAIMOVICI"***
**ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012**
**Filiera teoretică, profil umanist**

**Clasa a X-a**

**1.** O întreprindere este construită astfel încât suma distanţelor la cei patru furnizori de materii prime să fie minimă. Raportându-ne la un sistem de axe ortogonale, cu unitatea de 1km, locaţiile furnizorilor au următoarele coordonate: $O(0,0)$, $B(8,20)$, $C(36,27)$, $D(56,0)$.
Determinaţi coordonatele punctului $A$ unde se află întreprinderea.

**2.** Sistemul de scriere Braille, utilizat de către orbi, constă din caractere cuprinzând fiecare între 1 şi 6 puncte în relief (punctele înnegrite), dispuse astfel (ex. litera A): ● ○ .
○ ○
○ ○

a) Câte caractere are sistemul?
b) Câte combinaţii pot fi formate din exact trei puncte în relief?

**3.** a) Să se rezolve: $5^x + 12^x \le 13^x$.
b) Demonstraţi că $2^{2012}$ are cel puţin 604 cifre.

**4.** Magnitudinea aparentă a unui astru de luminozitate $L$ este definită în raport cu o luminozitate de referinţă $L_0$ prin $M = \lg \frac{L}{L_0}$ prin convenţia: magnitudinea creşte de 5 ori când luminozitatea se micşorează de 100 ori. Determinaţi partea întreagă a magnitudinii aparente a următoarelor corpuri cereşti: Sirius ($L = 3{,}87L_0$), Venus ($L$=43,65$L_0$), Luna ($L = 1{,}2 \cdot 10^5$), Soare ($L = 4{,}786 \cdot 10^{10}$).

***Notă:*** *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
**Filiera teoretică, profil umanist**

**Clasa a XI-a**

**1.** Într-un lac sărat adânc de 10m, salinitatea straturilor de apă (raportul dintre masa de săruri şi masa amestecului de apă cu săruri) creşte direct proporţional cu adâncimea, de la 8% la suprafaţă până la 13% la fundul său. Exprimaţi salinitatea s% a stratului aflat la adâncimea de h metri ($0 \le h \le 10$).

**2.** Notele obţinute de un grup de 20 de elevi la două teste sunt următoarele:

Testul A

| Nota | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Efectiv elevi | 0 | 0 | 2 | 2 | 3 | 4 | 6 | 2 | 1 |

Testul B

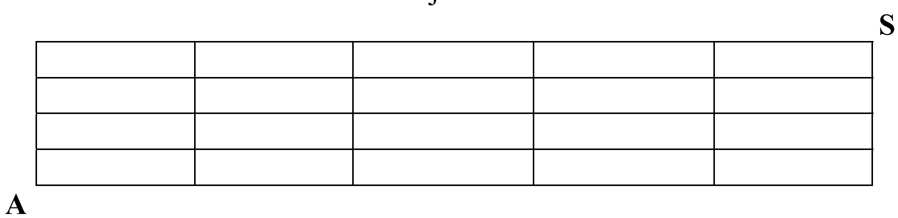
| Nota | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Efectiv elevi | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 | 4 | 5 |

a) Comparaţi mediile $m_1$ şi $m_2$ în cele două cazuri.

b) Comparaţi abaterile medii pătratice, $\sigma_1$ şi $\sigma_2$.

c) Aflaţi numărul de elevi pentru care nota este situată în intervalul $(m_i - \sigma_i, m_i + \sigma_i)$, $i \in \{1; 2\}$.

**3.** Străzile din cartierul Anei au forma de mai jos:

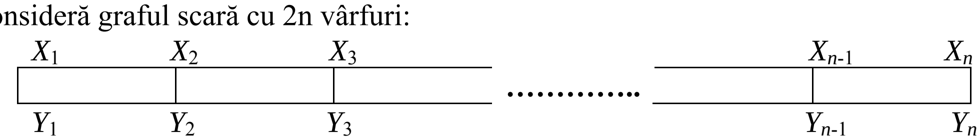



Pentru a ajunge de acasă (A) la serviciu (S) ea parcurge în fiecare zi un drum de lungime minimă.

a) Ştiind că dimensiunile unui dreptunghi mic sunt: 300m latura orizontală şi 200m cea verticală, aflaţi lungimea drumului minim.

b) După câte zile în care a mers pe trasee diferite, Ana a trebuit să reia un drum parcurs anterior?

**4.** Se consideră graful scară cu 2n vârfuri:




a) Dacă n = 3, în câte moduri putem alege 3 muchii care nu au două câte două extremităţi comune?

b) Dacă f(n) reprezintă numărul de moduri în care putem alege n muchii care nu au două câte două extremităţi comune pentru o scară cu *n* trepte, arătaţi că pentru $n \ge 3$, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

***Notă:*** *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
**Filiera teoretică, profil umanist**

**Clasa a XII-a**

**1.** Un lot de jucători al unei echipe de fotbal are 2 portari, 8 jucători pentru apărare şi 9 jucători de atac. În câte moduri se poate forma echipa de start cu 11 jucători selectaţi din lotul existent, dacă aceasta trebuie să fie compusă din: 1 portar, 4 jucători de apărare şi 5 jucători de atac?

**2.** Americanul John a moştenit 25000 de dolari. O parte din aceşti bani i-a depus într-o bancă, o parte i-a investit în obligaţiuni municipale şi o parte într-un fond mutual. După un an el a primit o dobândă totală de 1620 de dolari. Ştiind că banca i-a plătit o dobânda de 6% anual, obligaţiunile o dobândă de 7% anual, fondul mutual 8% anual şi că John a investit mai mult cu 6000 de dolari în obligaţiuni municipale decât în fondul mutual, precizaţi ce sume a investit John in fiecare categorie.

**3.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $A^4$.

b) Dacă matricea $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţiile $B\cdot E_1 = E_1\cdot B$ şi $B\cdot E_2 = E_2\cdot B$, să se demonstreze că există $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

c) Să se demonstreze că: dacă oricare ar fi $x\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^n\cdot x = x\cdot A^n$, atunci există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 4k$.

**4.** Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

b) Să se determine elemente simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "$*$" .

c) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } 2012 \text{ ori}} = -1$.

***Notă:*** *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*